固定モーメント法に依る節点の移動するラーメンのθ及Rの解析

橋　本　良　基

The Analysis of the Deformations θ and R of Rigid Frames, in which the Joints move laterally, based on the Foundation of the Principles of Cramped-Moment Method.

Yoshiki HASHIMOTO

The end moments of the members of rigid frames, in which the joints move laterally, are generally caluculated by the Cramped Moment-Type Method.

The author considers the basis of the cramped-moment method as follows : First, restraining the joint ro-tation the previnus lateral displacements $\triangle$R are calculated ; then the corresponding rot rotations$\triangle\theta$ are able to be expresseo by the pisplacements of adjacent stories. Finally, the true rotations and displacements are obtaind as summations of $\triangle\theta$ and $\triangle$R respectively.

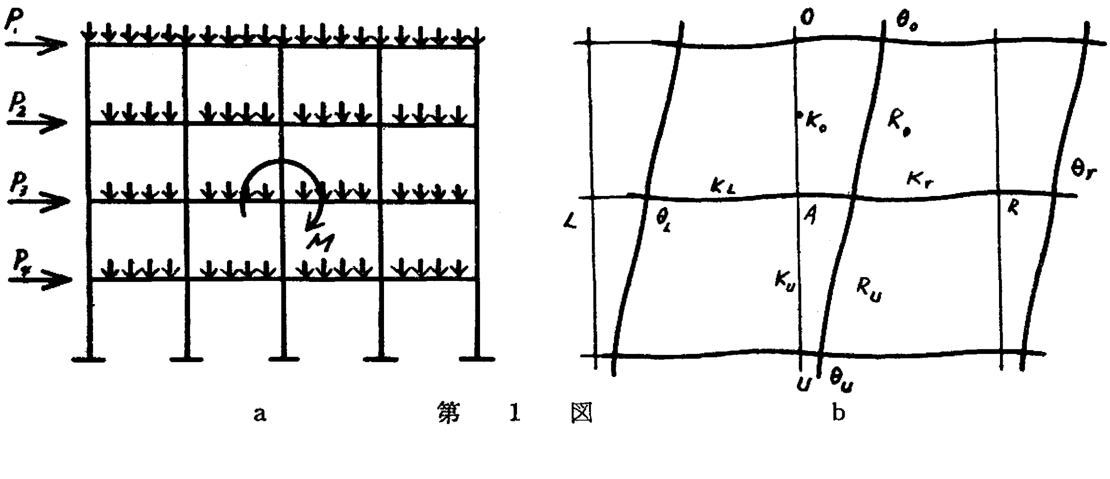
Thus θ and R are alternately using, deformations of joints or stories obtain in any degree of accuracy desired. In the same way the end moments of members are determined by a common method.

1. 緒　言

節点の移動が著しくない構では節点の回転だけで此を解く事も出来るが相当の誤差は免れない。近時節点の移動を考慮して固定法に依り此を解く事が試みられている。その根拠の主体であるθ及Rの性質を理論的に究明し，此を取扱う範囲等を知るの資に供せんとして此の篇を草した。

2. 理　論

先づ最初に於て普通の固定法により節点回転角θ及部材回転角Rを求める。下図に示す短形構ラーメンが外力と平衡の状態にある場合各節点には節点回転角θ及各柱には部材回転角Rが生ずる。此の時ラ



a　　第 1 図　　b

ーメンの一部A—LORUを取り出して見ると節点方程式より下の式の様な関係がある。

$$\theta_A=\frac{3K_0R_0+3K_uR_u}{2(K_l+K_0+K_r+K_u)}-\frac{\Sigma K\theta}{2(K_l+K_0+K_r+K_u)}+\frac{1}{2(K_l+K_0+K_r+K_u)}\frac{C_{Ar}-C_{AL}+M}{2E}\quad\cdots\cdots(1)$$

こゝに K_l, K_r は梁材 AL, ARの剛度

K_0, K_u は柱材 A0, AUの剛度

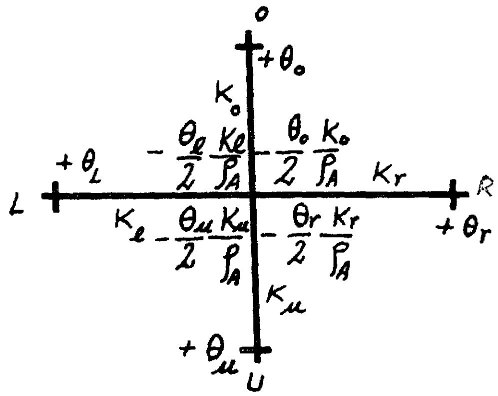
$\Sigma K\theta=K_l\theta_l+K_0\theta_0+K_r\theta_r+K_u\theta_u$

C_{Al}, C_{Ar}は梁材AL, ARのA点の左右端の垂直荷重に依る固定モーメントであり, MはA点に働くモーメントである。(1)式を書き直すと次の様になる。

$$\theta_A=\frac{3R_0}{2}\frac{K_0}{\rho_A}+\frac{3R_u}{2}\frac{K_u}{\rho_A}-\frac{\theta_l}{2}\frac{K_l}{\rho_A}-\frac{\theta_0}{2}\frac{K_0}{\rho_A}-\frac{\theta_r}{2}\frac{K_r}{\rho_A}-\frac{\theta_u}{2}\frac{K_u}{\rho_A}-\frac{1}{\rho_A}\frac{M-C_{Al}+C_{Ar}}{4E}$$

こゝに $\rho_A=(K_l+K_0+K_r+K_u)$

第 2 図



$\frac{K_0}{\rho_A}$, $\frac{K_u}{\rho_A}$, $\frac{K_l}{\rho_A}$, $\frac{K_r}{\rho_A}$ は節点Aに於ける上下の柱及左右の梁への分配率である。又(1)式の第二項の関係を図示すると第2図の様になる。

次に層方程式より次の様な関係が求めらる。

$\Sigma\ (M_{A0}+M_{0A})=\Sigma Hh_0$

$\Sigma-Hh_0=P_0h_0$

$\Sigma(M_{A0}+M_{0A})=\Sigma 6EK_0(\theta_A+\theta_0)-\Sigma 12EK_0R_0$

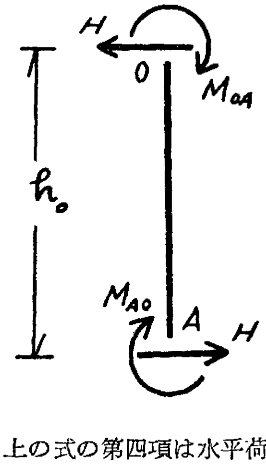
$\Sigma 12EK_0R_0=\Sigma 6EK_0(\theta_A+\theta_0)+P_0h_0$

$$\therefore\ R_0=\frac{1}{\Sigma K_0}\left\{\sum\frac{K_0(\theta_A+\theta_0)}{2}+\frac{P_0h_0}{12E}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

こゝにP_0は節点Aより上に作用する水平力の和である。即ち$P_0=P_1+P_2+\cdots$

同様にして

第 3 図



$$R_u=\frac{1}{\Sigma K_u}\left\{\sum\frac{K_u(\theta_A+\theta_u)}{2}+\frac{Ph_u}{12E}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ΣK_0, ΣK_uは節点Aの上下の層の柱のKの横の和である。又$\Sigma K_0(\theta_A+\theta_0)/2$は一本の柱の柱頭, 柱脚の節点回転角の平均値に其の柱のKを乗じたものの横の和である。

次に(2)式及(3)式を(1)式のR_0, R_uに夫々代入すればθの一般式として次の様な式が得られる。

$$\theta_A=\frac{1}{2\rho_A}\left\{\frac{3K_0}{\Sigma K_0}\sum\frac{K_0(\theta_A+\theta_0)}{2}+\frac{3K_u}{\Sigma K_u}\sum\frac{K_u(\theta_A+\theta_u)}{2}\right\}-\frac{\Sigma K\theta}{2\rho_A}$$

$$+\frac{1}{2\rho_A}\left(\frac{K_0}{\Sigma K_0}\frac{P_0h_0}{4E}+\frac{K_u}{\Sigma K_u}\frac{Ph_u}{4E}+\frac{M-C_{Al}C_{Ar}}{2E}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

上の式の第四項は水平荷重, 垂直荷重及モーメントに依る荷重項で荷重さえ与えられゝば他のθやRに無関係に定る値である。

今問題を簡単に取扱うために水平荷重だけに就いて考えればθ_Aは次の様である。

$$\theta_A=\frac{1}{2\rho_A}\left\{\frac{3K_0}{\Sigma K_0}\sum\frac{K_0(\theta_A+\theta_0)}{2}+\frac{3K_u}{\Sigma K_u}\sum\frac{K_u(\theta_A+\theta_u)}{2}\right\}-\frac{\Sigma K\theta}{2\rho_A}+\frac{1}{2\rho_A}\left(\frac{K_0}{\Sigma K_0}\frac{P_0h_0}{4E}+\frac{K_u}{\Sigma K_u}\frac{Ph_u}{4E}\right)\cdots\cdots\cdots(4)'$$

$$R_u=\frac{1}{\Sigma K_u}\sum\frac{K_u(\theta_A+\theta_u)}{2}+\frac{1}{\Sigma K_u}\frac{Ph_u}{12E}$$

$$R_0=\frac{1}{\Sigma K_0}\sum\frac{K_0(\theta_A+\theta_0)}{2}+\frac{1}{\Sigma K_0}\frac{P_0h_0}{12E}$$

今すべてのθを0とした場合即各柱の柱頭，柱脚を固定した場合の荷重に依る部材回転角Rは(2)式及(3)式の第一項を夫々0とする事に依り求まるから其の場合の部材回転角を夫々 R'_0，R'_u とすれば

$$3R_0'=\frac{1}{\Sigma K_0}\frac{P_0h_0}{4E},\qquad 3R_u'=\frac{1}{\Sigma K_u}\frac{Ph_u}{4E}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

を得る。此は柱の両端を夫々固定した場合の荷重による部材回転角の3倍である。

又(4′)式の右辺のすべての節点回転角θを0とした場合のθ_Aをθ_A'とすると

$$\theta_A'=\frac{1}{2\rho_A}\left(\frac{K_0}{\Sigma K_0}\frac{P_0h_0}{4E}+\frac{K_u}{\Sigma K_u}\frac{Ph_u}{4E}\right)$$

を得る。又上の式に(5)式の値を代入すると

$$\theta_A'=\frac{1}{2\rho_A}(3K_0R_0'+3K_uR_u')$$

$$\theta_A'=\frac{3R_0'}{2}\frac{K_0}{\rho_A}+\frac{3R'_u}{2}\frac{K_u}{\rho_A}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

こゝに K_0/ρ_A，K_u/ρ_A は夫々節点Aの上下の柱への分配率である。

(6)式は水平荷重がラーメンに作用した場合，各柱の両端を固定して横に移動を与えた場合の部材回転角 R'に依る節点Aの回転角であり，又節点の回転角が最初0であつたものの，増加とも考えられる。而も此は荷重が与えられゝば各々の節点に於て求むる事が出来る。

斯くして各節点のθ'が求まると次に再び(2)式及(3)式の第一項のθに今求めたθ'の値を代入する，そうすると各節点の回転角が最初0からθ'になつた為に R_0，R_u の増分が生ずる。夫れをそれぞれ$\triangle R_0'{}_{(\theta)}$，$\triangle R_u'{}_{(\theta)}$ とすれば

$$\left.\begin{aligned}\varDelta R'_{0(\theta)}&=\frac{1}{\Sigma K_0}\sum\frac{K_0(\theta_A'+\theta_0')}{2}\\ \varDelta R_u'{}_{(\theta)}&=\frac{1}{\Sigma K_u}\sum\frac{K_u(\theta_A'+\theta'_u)}{2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

を得る。此の(7)式の$\triangle R_0'{}_{(\theta)}$，$\triangle R_u'{}_{(\theta)}$ の値を (4)′ 式に夫々代入すると節点回転角θ_Aの第二次の増分が求まる。即ち

$$\triangle\theta''_A=\frac{3\triangle R_0'{}_{(\theta)}}{2}\frac{K_0}{\rho_A}+\frac{3\triangle R_u'{}_{(\theta)}}{2}\frac{K_u}{\rho_A}-\frac{1}{2\rho_A}\Sigma K\theta'$$

以上の様な方法を順次に繰返せば第三次，第四次等次々の$\triangle\theta$を求むる事が出来る。

$$\triangle\theta_A'''=\frac{3\triangle R_0''{}_{(\theta)}}{2}\frac{K_0}{\rho_A}+\frac{3\triangle R_u''{}_{(\theta)}}{2}\frac{K_u}{\rho_A}-\frac{1}{2\rho_A}\Sigma K\theta''$$

而も回数を重ねるに従つて$\triangle\theta$の値は漸次小さくなり遂に0に収斂する。故に此等毎回の$\triangle\theta$の値の合計を取れば終局の節点回転角が求まる。

又$\triangle\theta$ と$\triangle$R とが交々に求まつて行くのであるから同様にして部材回転角Rの終局値を求むる事が出来る。即ち

$$\theta_A=\theta'_A+\triangle\theta_A''+\triangle\theta'''_A+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_0=R_0'+\triangle R_0''_{(\theta)}+\triangle R_0'''_{(\theta)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_u=R_u'+\triangle R_u''_{(\theta)}+\triangle R_u'''_{(\theta)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3. 図上計算法

以上の結果から θ, R を求むる為に図上計算をなす場合の順序を簡単に示すと以下の様である。

(1) 各節点の分配率を求め節点の周囲に記入する。

$$\frac{K_l}{K_l+K_0+K_r+K_u},\quad \frac{K_0}{K_l+K_0+K_r+K_u},\quad \frac{K_r}{K_l+K_0+K_r+K_u},\quad \frac{K_u}{K_l+K_0+K_r+K_u}$$

(2) 各層の柱の剛度Kの横の総和を求める。

$$\Sigma K_0,\quad \Sigma K_u$$

(3) 〔A〕水平荷重の場合には $3R_0'=1/\Sigma K_0$, $P_0h_0/4E$,

$3R_u'=1/\Sigma K_u\ Ph_u/4E$ を求めてラーメン外の一番左に記入する。

〔B〕垂直荷重及モーメントの場合には

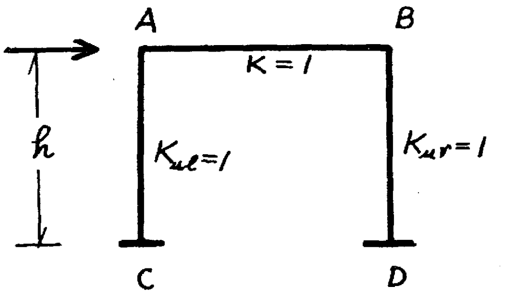
$$\theta_A=\frac{1}{K_l+K_0+K_r+K_u}\ \frac{M-C_{Al}+C_{Ar}}{4E}$$

を求めて節点右下θの直下に記入する。

以下例題に就いて述べよう。

例1. 第4図の様な対称構に水平荷重が作用した場合，

第　4　図



$$\theta_A=\theta_B\quad \rho_A=(1+1)=2\quad \Sigma K_u=1+1=2$$

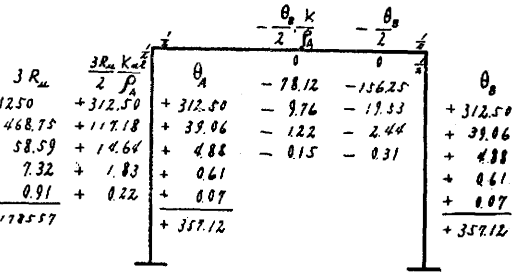
$$3R'_u=\frac{1}{\Sigma K_u}\frac{Ph}{4E}=\frac{1}{8}\frac{Ph}{E}=0.125\left(\frac{Ph}{E}\right).$$

$$\theta_A'=\frac{1}{2\rho_A}(3K_uR_u'),\quad 3R_u'=1250\times10^{-4}\left(\frac{Ph}{E}\right)$$

$$\triangle 3R'_{u(\theta)}=\frac{3}{\Sigma K_u}\sum\frac{K_u\theta'}{2},$$

$$\triangle\theta_A''=\frac{3\triangle R_u'}{2}\frac{K_u}{\rho_A}-\frac{\theta_B'}{2}\frac{K}{\rho_A}$$

第　5　図



第5図の如く求めたθ及3Rの値を撓角法で解いた値と比較すると下図の如くなる。

第　6　図

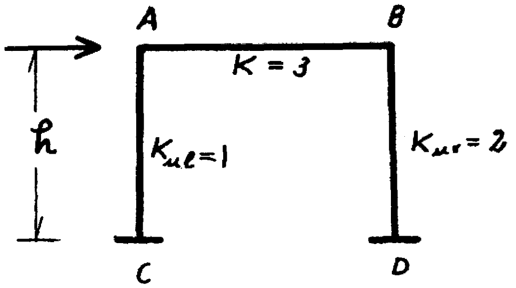
	3R	θA
撓角法に依る値	0.17857	0.035714
計　算　値	0.17856	0.035712

単位 $\frac{ph}{E}$

例2. 第7図の様な非対称構に水平荷重が作用した場合

$$\rho_A=1+3=4,\quad \frac{K_{ul}}{\rho_A}=\frac{1}{4},\quad \frac{K}{\rho_A}=\frac{3}{4}$$

第　7　図

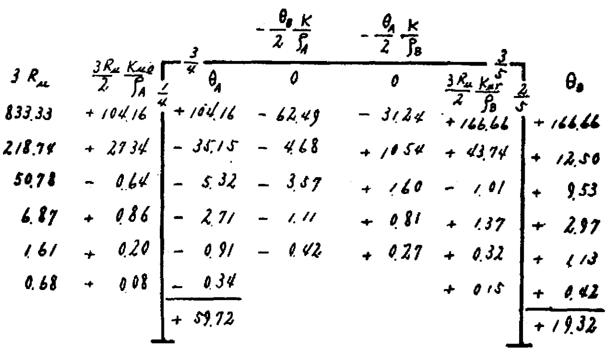


$$\rho_B=3+2=5,\quad \frac{K_{ur}}{\rho_B}=\frac{2}{5},\quad \frac{K}{\rho_B}=\frac{3}{5}$$

$$3R_u'=\frac{1}{\Sigma K}\frac{Ph}{4E}=\frac{1}{12}\frac{Ph}{E}=0.08\dot{3}\left(\frac{Ph}{E}\right)$$

$$=833.33\times10^{-4}\left(\frac{Ph}{E}\right)$$

第　8　図



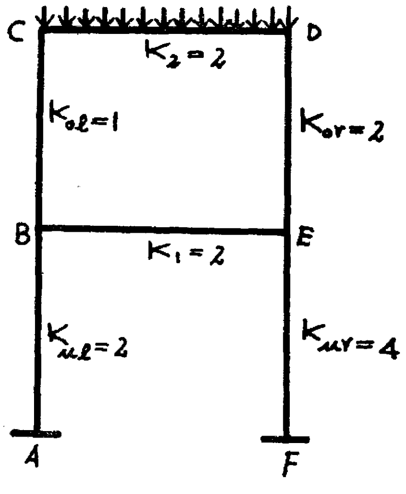
以上により第8図の如く求めた θ_A 及 θ_B の値を撓角法で解いた値と比較すると第9図の様である。

第　9　図

θ	θ_A	θ_B	
撓角法に依る値	0.00595	0.01934	単位 $\frac{ph}{E}$
計　算　値	0.00597	0.01932	

例3.　第10図の様な非対称構に等布荷重が作用した場合，

第　10　図



$$\rho_B=2+2+1=5,\quad \frac{K_{ul}}{\rho_B}=\frac{2}{5},\quad \frac{K_{0l}}{\rho_B}=\frac{1}{5},\quad \frac{K_1}{\rho_B}=\frac{2}{5}$$

$$\rho_c=1+2=3,\quad \frac{K_{0l}}{\rho_c}=\frac{1}{3},\quad \frac{K_2}{\rho_c}=\frac{2}{3}$$

$$\rho_D=2+2=4,\quad \frac{K_{0r}}{\rho_D}=\frac{2}{4},\quad \frac{K_2}{\rho_D}=\frac{2}{4}$$

$$\rho_e=2+2+4=8,\quad \frac{K_{0r}}{\rho_e}=\frac{2}{8},\quad \frac{K_{ur}}{\rho_e}=\frac{4}{8},\quad \frac{K_1}{\rho_e}=\frac{1}{8}$$

$$\Sigma K_0=3\quad \Sigma K_u=6$$

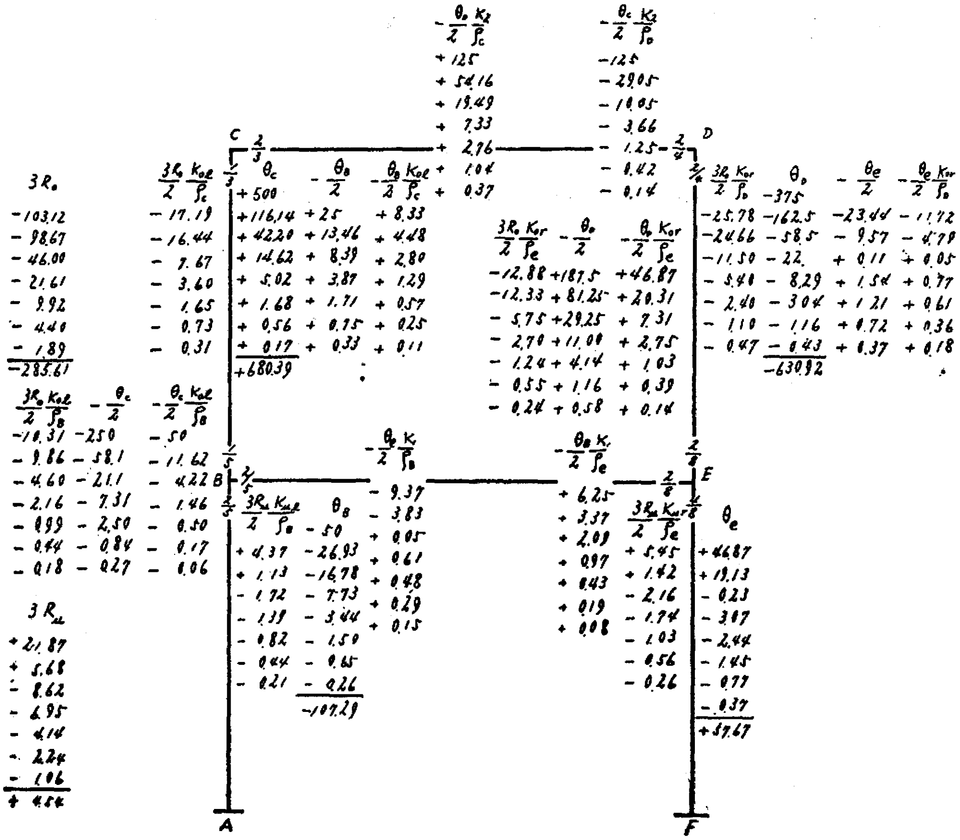
$$C_{CD}=+6000\text{kg.m},\quad C_{DC}=-6000\text{kg.m}$$

$$\theta'_C=\frac{1}{\rho_C}\frac{1}{4}(C_{CD})\frac{1}{E}=\frac{6000}{4\times3}\frac{1}{E}=+500\frac{1}{E}$$

$$\theta'_D=\frac{1}{\rho_D}\frac{1}{4}(C_{DC})\frac{1}{E}=-\frac{6000}{4\times4}\frac{1}{E}=-375\frac{1}{E}$$

此等の数値に依り第11図の如く図上計算を行えば節点回転角 θ 及部材回転角 R が得られる。

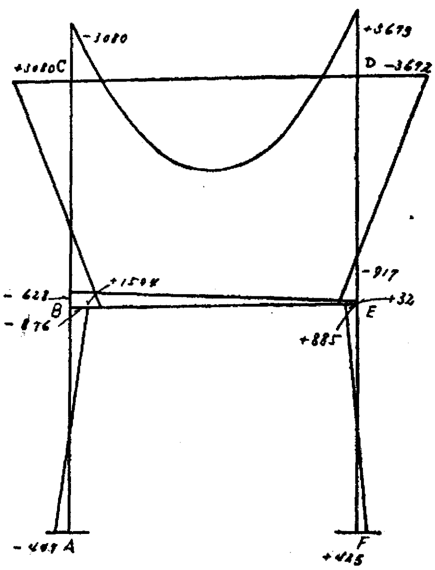
第 11 図



θ_B	θ_C	θ_D	θ_E	$3R_0$	$3R_u$
−107.	+680.4	−631.0	+57.6	−285.6	+4.54

此に依り各節点モーメントを算出すれば次の様である。

第 12 図



$M_{CD}=-3080$, $M_{BC}=+1504$,

$M_{DC}=+3673$, $M_{ED}=-917$

$M_{CB}=+3080$, $M_{BE}=-628$,

$M_{DE}=-3672$, $M_{EB}=+32$

$M_{AB}=-447$, $M_{BA}=-876$,

$M_{EF}=+885$, $M_{FE}=+425$

此を図示すれば第12図の様になる。